Architecture des ordinateurs

(X31I050)

Frédéric Goualard

Laboratoire d'Informatique de Nantes-Atlantique, UMR CNRS 6241
Bureau 112, bât. 11
Frederic.Goualard@univ-nantes.fr

Circuits logiques

Circuits combinatoires

Fonctions logiques

Ordinateur *numerique* binaire ➠ exprimer toutes les opérations sous forme de fonctions logiques :

Fonction n-aire f :

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$$

complétement ou incomplètement définie

Exemples de fonctions logiques

$f(a_1, a_2, a_3)$			
a_1	a_2	a_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Définition complète

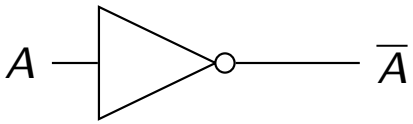
$g(a_1, a_2, a_3)$			
a_1	a_2	a_3	g
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	x

Définition incomplète

Tables de vérité

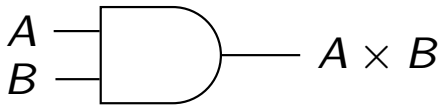
Fonctions logiques (1/3)

Négation $\neg A$



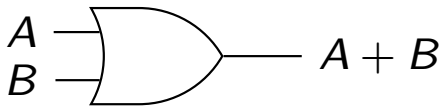
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ET logique $A \wedge B$



A	B	$A \times B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OU logique $A \vee B$



A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Algèbre de Boole

Associativité de $\vee$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Associativité de $\wedge$	$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
Commutativité de $\vee$	$A + B = B + A$
Commutativité de $\wedge$	$A \times B = B \times A$
Distributivité de $\wedge$ p.r. $\vee$	$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
Distributivité de $\vee$ p.r. $\wedge$	$A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C)$
Identité pour $\vee$	$A + 0 = A$
Identité pour $\wedge$	$A \times 1 = A$
Élément absorbant pour $\wedge$	$A \times 0 = 0$
Élément absorbant pour $\vee$	$A + 1 = 1$
Idempotence pour $\vee$	$A + A = A$
Idempotence pour $\wedge$	$A \times A = A$
Absorption	$A \times (A + B) = A$
Absorption	$A + (A \times B) = A$
Complémentarité	$A \times \overline{A} = 0$
Complémentarité	$A + \overline{A} = 1$
Complémentarité	$\overline{\overline{A}} = A$
Simplification	$A + (\overline{A} \times B) = A + B$
Simplification	$A \times (\overline{A} + B) = A \times B$
Simplification	$(A \times B) + (A \times \overline{B}) = A$
Simplification	$(A + B) \times (A + \overline{B}) = A$

Dualité : lois de De Morgan

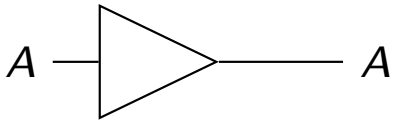
Dualité $\vee$ / $\wedge$:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\overline{A \times B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Passage d'un connecteur à l'autre

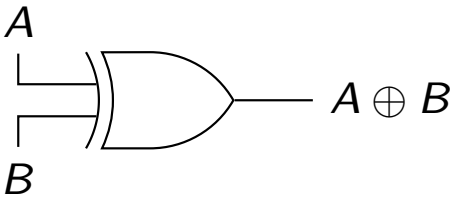
Fonctions logiques (2/3)

Identité A



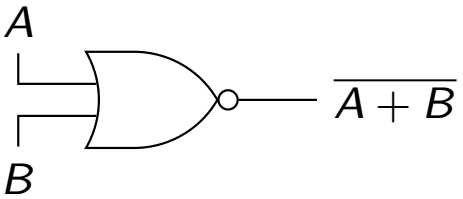
A	A
0	0
1	1

OU exclusif $A \oplus B$



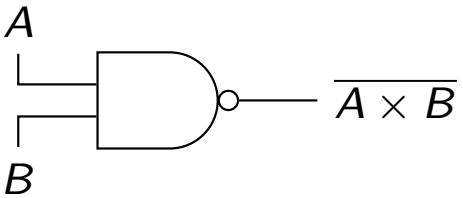
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

« NON OU » (NOR) $\overline{A + B}$



A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

« NON ET » (NAND) $\overline{A \times B}$



A	B	$\overline{A \times B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonctions logiques (3/3)

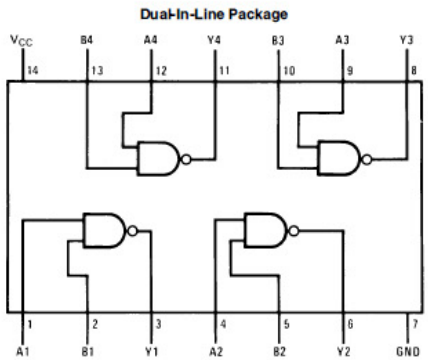
- Nombreuses autres fonctions logiques :
  - « NON OU »exclusif
  - Fonctions ternaires
    - « NOR »à trois entrées (*Apollo Guidance Computer*)
    - Fonction de Toffoli
    - ...
  - ...

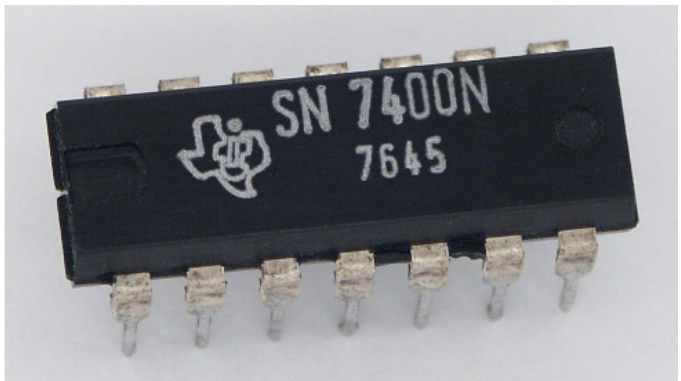
Définition

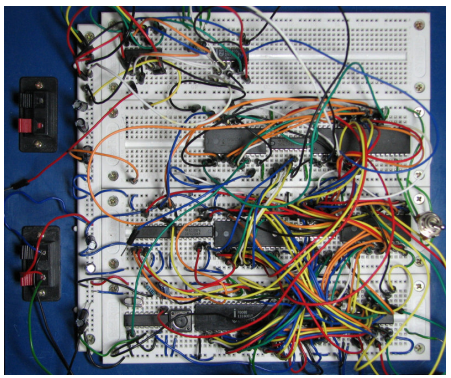
Un ensemble de connecteurs logiques $\mathcal{S}$ est fonctionnellement complet si toute fonction logique peut s'écrire en utilisant uniquement les connecteurs présents dans $\mathcal{S}$.

Ensemble fonctionnellement complet minimal : on ne peut retirer de connecteur de $\mathcal{S}$ sans perdre la complétude fonctionnelle

- L'ensemble (ET, OU, NON) est fonctionnellement complet (non minimal)
- (OU, NON) : fonctionnellement complet et minimal
- (NAND) et (NOR) : fonctionnellement complets et minimaux







Produits de sommes / sommes de produits

- En général, pas de représentation unique d'une fonction logique :

$$AB\overline{C} + CD + C\overline{D} \equiv AB + C$$
$$A \oplus B \equiv A\overline{B} + \overline{A}B$$

- Nombreuses formulations équivalentes utilisant les différents connecteurs logiques

Forme somme. Somme (OU) de termes

$$A\overline{B}C + A\overline{B}C + A\overline{C}$$

Forme produit. Produit (ET) de termes

$$(A + B + C) \times (A + \overline{B} + C) \times (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Formes canoniques

Définition (Forme canonique produit de sommes)

Une expression logique est sous forme canonique « produit de sommes » si :

- Toutes les variables apparaissent dans chaque facteur (A ou $\overline{A}$) ;
- Chaque facteur est une disjonction (OU) de variables ;
- Tous les facteurs sont différents ;
- Les facteurs sont connectés par des conjonctions (ET).

Exemple :

$$f(A, B, C) = (\overline{A} + \overline{B} + C) \times (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Définition (Forme canonique somme de produits)

Une expression logique est sous forme canonique « somme de produits » si :

- Toutes les variables apparaissent dans chaque facteur (A ou $\overline{A}$) ;
- Chaque facteur est une conjonction (ET) de variables ;
- Tous les facteurs sont différents ;
- Les facteurs sont connectés par des disjonctions (OU).

Exemple :

$$f(A, B, C) = \overline{AB}C + \overline{AB}C$$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A,B,C) =$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C}$$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A+B+C$ (De Morgan)

$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+ABC$

Formes canoniques et table de vérité

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

$$\begin{aligned} f(A,B,C) = &(A+B+C)\times \\ &(A+B+\overline{C})\times \\ &(A+\overline{B}+\overline{C})\times \\ &(\overline{A}+B+C)\times \\ &(\overline{A}+B+\overline{C}) \end{aligned}$$

Circuits combinatoires

Boîte noire dont les sorties S_i ($i \in \{1, \ldots, m\}$) ne dépendent que des entrées E_j ($j \in \{1, \ldots, n\}$)

Synthèse de circuit combinatoire

- Objectif : réaliser un circuit à partir d'une fonction booléenne
- Méthode :
  1. Calculer une forme canonique à partir de la table de vérité
  2. Simplifier l'expression
     - Manipulations algébriques
     - Tableau de Karnaugh
     - ...
  3. Associer une porte logique à chaque opérateur

Synthèses particulières :

- Circuit avec uniquement des NOR
- Circuit avec uniquement des NAND

Tableau de Karnaugh (1/2)

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Tableau de Karnaugh (1/2)

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Simplifications :

- $ABC + AB\overline{C} \equiv AB$

Tableau de Karnaugh (1/2)

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Simplifications :

- $ABC + AB\overline{C} \equiv AB$
- $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} = B\overline{C}$

Tableau de Karnaugh (1/2)

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

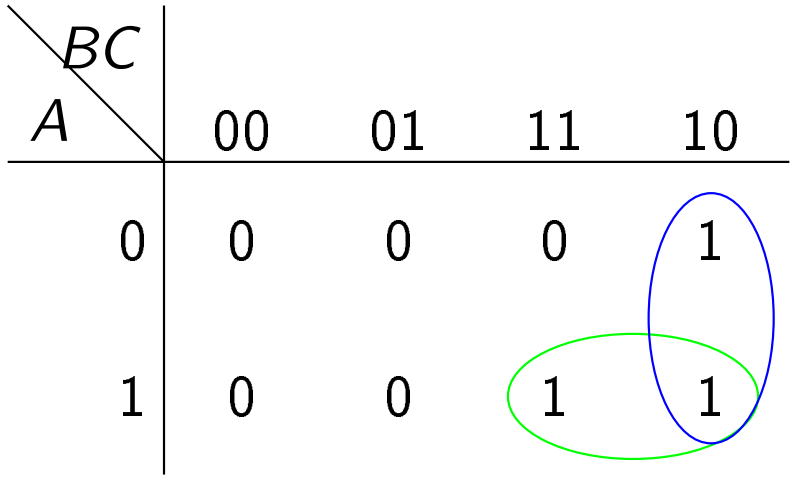
Simplifications :

- $ABC + AB\overline{C} \equiv AB$
- $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} = B\overline{C}$

D'où : $f(A,B,C) = AB + B\overline{C}$

Tableau de Karnaugh (2/2)

Réduction de fonction booléenne $\Sigma(\Pi)$ (minimisation du nombre de termes)



- Couvrir tous les « 1 »
- Faire le minimum de groupes
- Faire des groupes les plus larges possibles (côtés « en 2^x »)

Tableau de Karnaugh (2/2)

Réduction de fonction booléenne $\Sigma(\Pi)$ (minimisation du nombre de termes)

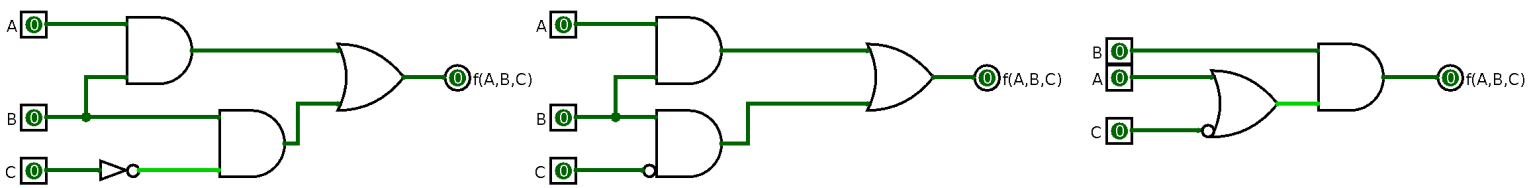
A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

- Couvrir tous les « 1 »
- Faire le minimum de groupes
- Faire des groupes les plus larges possibles (côtés « en 2^x »)

Exemple de synthèse

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$$f(A,B,C) = AB + B\overline{C} = B(A + \overline{C})$$

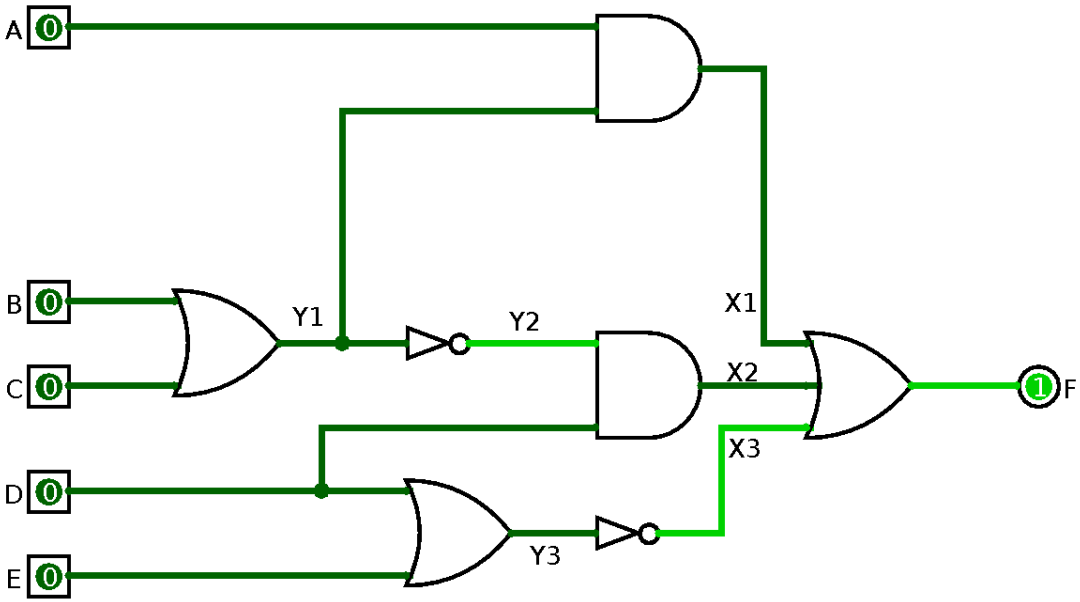


Analyse de circuit

Objectif : obtenir une fonction booléenne à partir d'un schéma logique

Méthode :
1. Partir de la sortie du circuit ;
2. Remplacer la porte par l'opérateur booléen correspondant ;
3. Simplifier ;
4. Remonter le circuit récursivement jusqu'aux entrées.

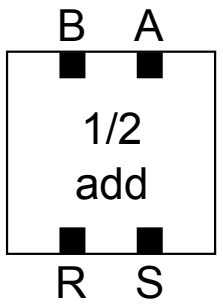
Exemple d'analyse



$$
\begin{aligned}
F &= X_1 + X_2 + X_3 \\
&= A \times Y_1 + Y_2 \times D + \overline{Y_3} \\
&= A \times (B + C) + \overline{Y_1} \times D + \overline{D + E} \\
&= A \times (B + C) + \overline{B + C} \times D + \overline{D + E}
\end{aligned}
$$

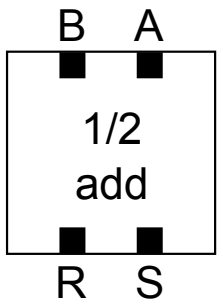
Demi-additionneur 1 bit

		1	0	1	1	0	**1**	← A
+		0	1	1	0	1	**1**	← B
		1	1	1	1	**1**		← R
	1	0	0	1	0	0	**0**	← S



Demi-additionneur 1 bit

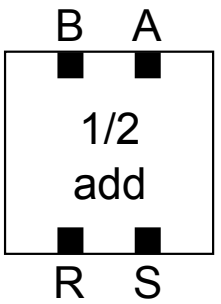
$$
\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \leftarrow A \\
+ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \leftarrow B \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \leftarrow R \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \leftarrow S
\end{array}
$$



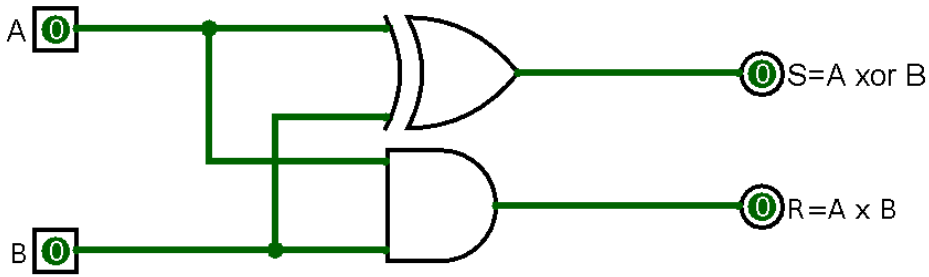
A	B	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Demi-additionneur 1 bit

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & \longleftarrow & A \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & \longleftarrow & B \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & & \longleftarrow & R \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \longleftarrow & S
\end{array}
$$

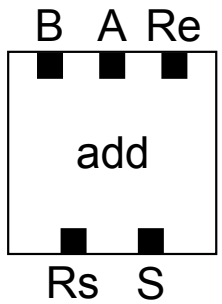


A	B	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



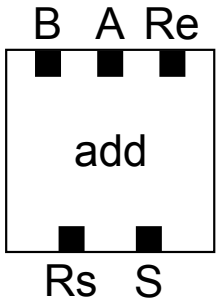
Additionneur 1 bit

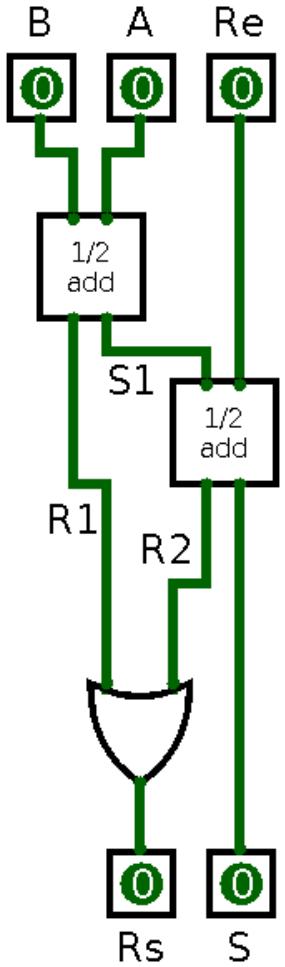
$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & \mathbf{0} & \leftarrow R_e \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \leftarrow A \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \leftarrow B \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \leftarrow R_s \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \leftarrow S
\end{array}
$$



Additionneur 1 bit

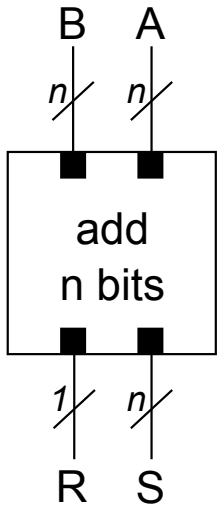
						0	←	R_e
		1	0	1	1	0	**1**	← A
+		0	1	1	0	1	**1**	← B
		1	1	1	1	**1**		← R_s
	1	0	0	1	0	0	**0**	← S

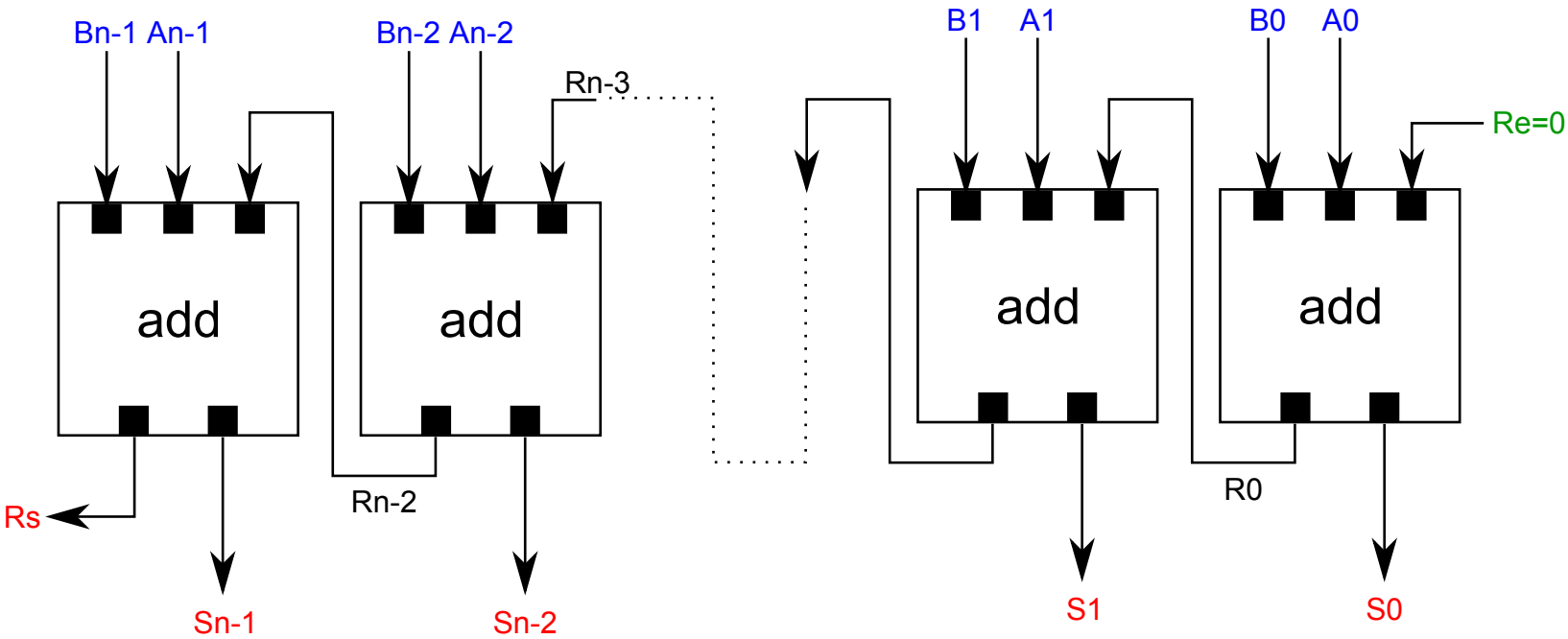




Additionneur *n* bits

Chaînage des additionneurs 1 bit :



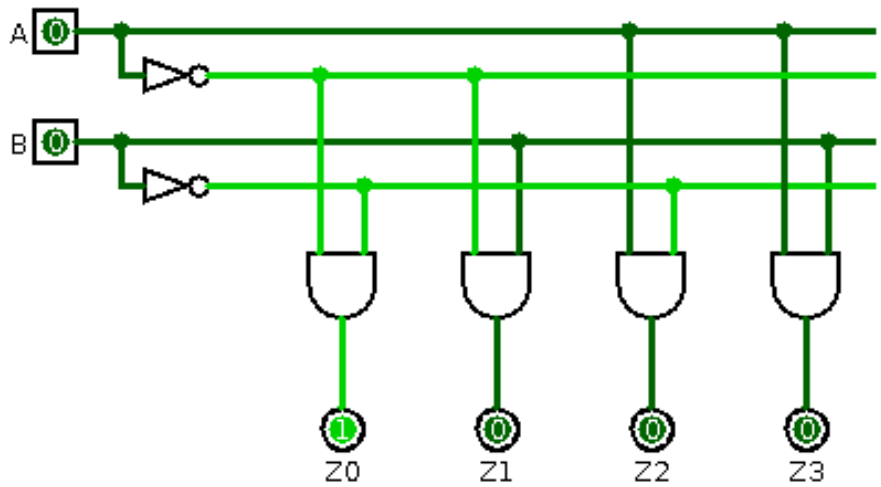


Décodeur

- Une seule sortie à 1 parmi 2^k — la i-ème — avec i sur k bits

Cas $i = 2$:

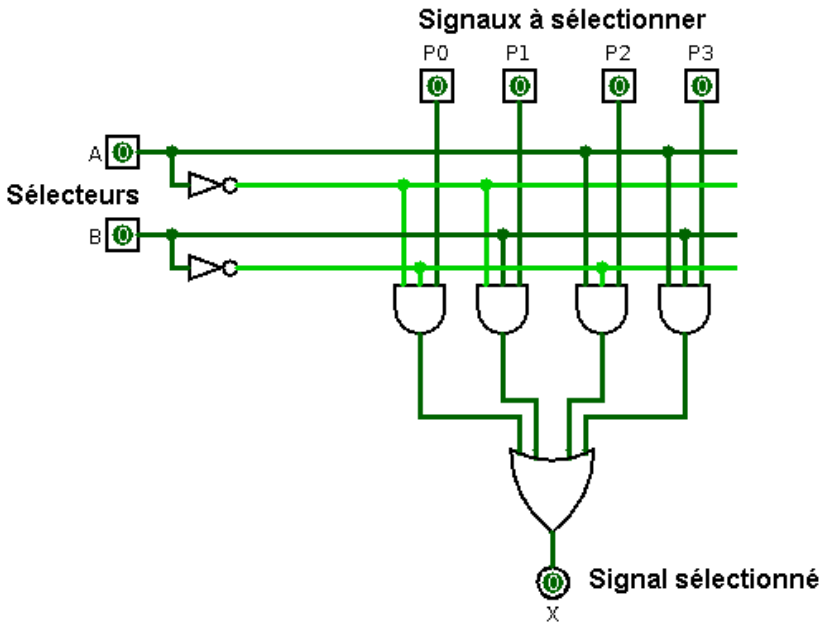
A	B	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1



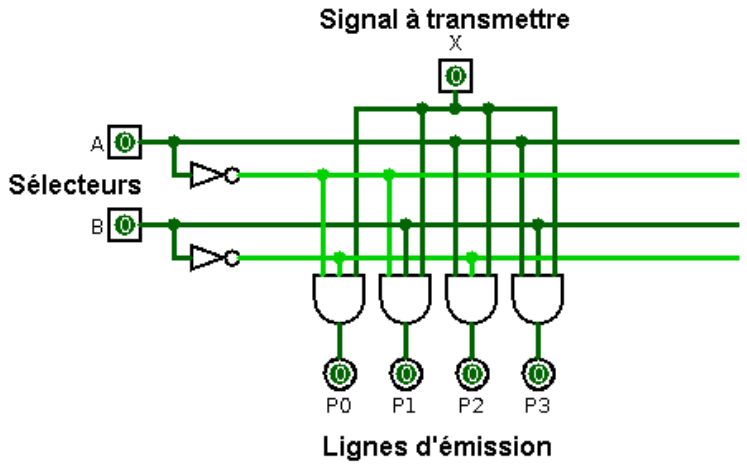
Multiplexeur/démultiplexeur

Multiplexage. Choix du signal à envoyer sur une ligne parmi n

Démultiplexage. Envoi d'un signal sur une ligne choisie parmi n

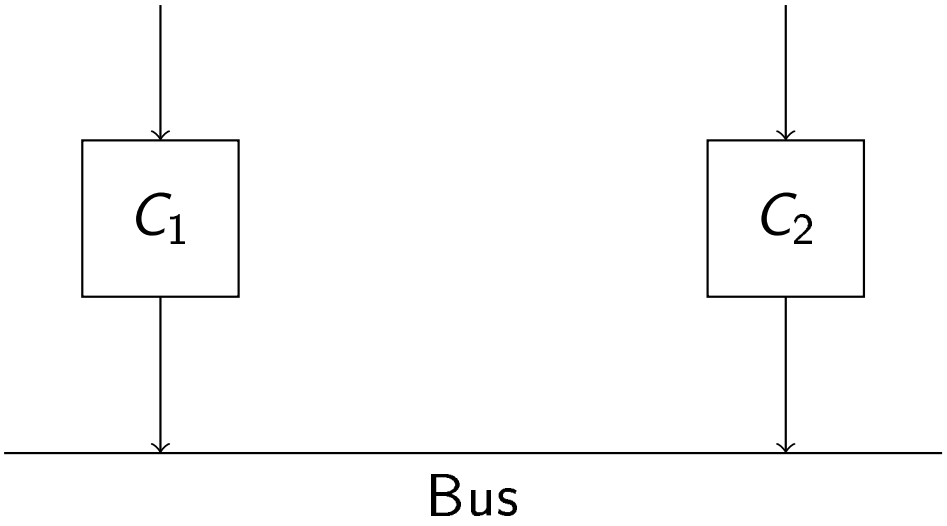


Multiplexeur

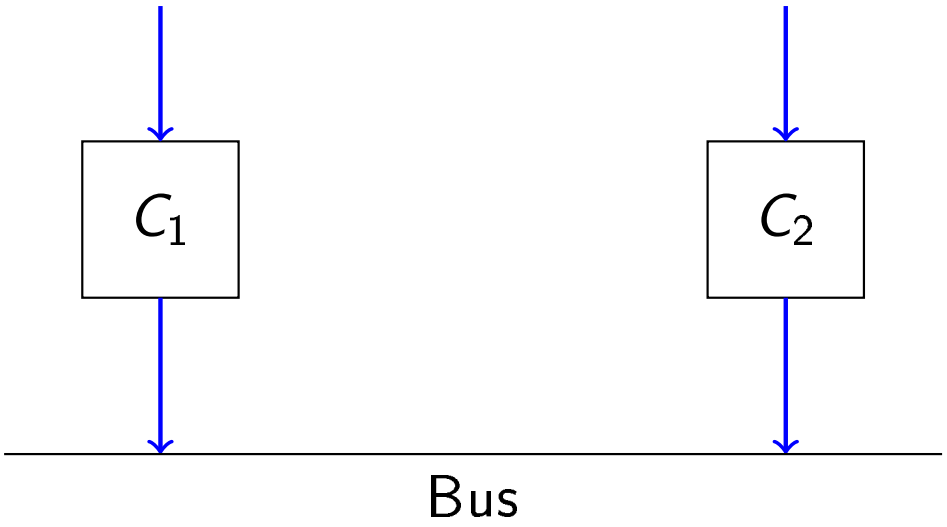


Démultiplexeur

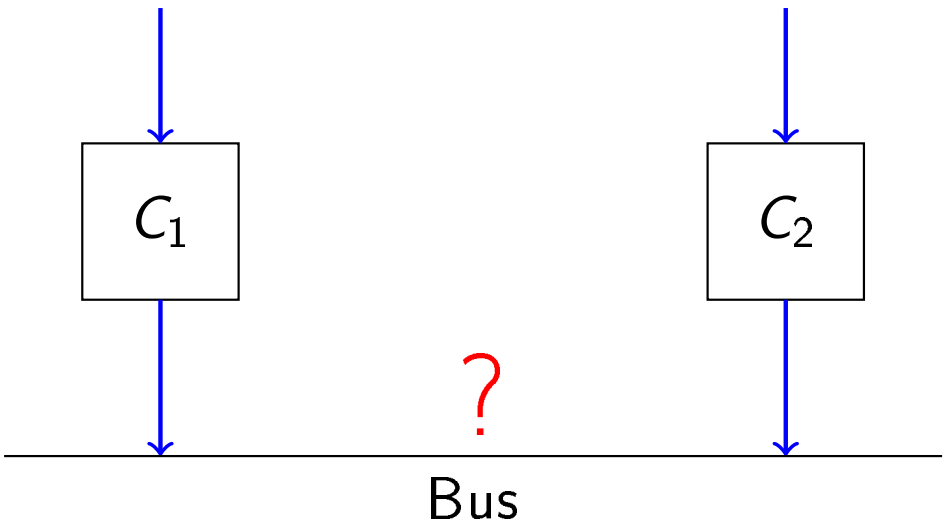
Logique à trois états



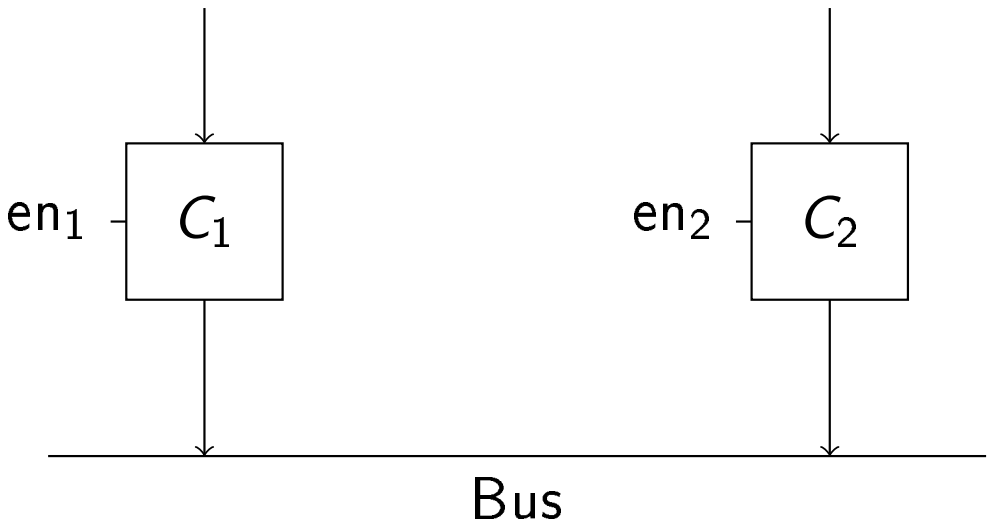
Logique à trois états



Logique à trois états



Logique à trois états



In	en	Out
0	0	Z
1	0	Z
Z	0	Z
0	1	0
1	1	1
Z	1	Z

- Introduction d'un état à haute impédance Z
- Dans l'état Z, aucun courant possible en entrée/sortie
- Possibilité de connecter plusieurs circuits à un bus en s'assurant qu'un seul bit *enable* est à 1