

# MATHÉMATIQUES



Semestre 1



**UE X1X0011 - Mathématiques**  
Contrôle Continu du 17 Décembre 2013  
Durée : 1 H 00

**Document autorisé : une feuille manuscrite format A4 recto verso.**

**Calculatrices non autorisées.**

**Les exercices sont indépendants.**

**Les réponses seront justifiées.**

**N'oubliez pas de préciser le numéro de votre groupe sur votre copie.**

Exercice 1 :

Soit  $f(x) = \arctan(2x)$ .

- 1). Donner le domaine de définition de  $f(x)$ .
- 2). Que vaut  $f(0)$ ? Que vaut  $f(1/2)$ ?
- 3). Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4). Calculer  $f'(x)$ .

Exercice 2 :

- 1). Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}$$

soit égale à :

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} .$$

- 2). Donner une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

Exercice 3 :

- 1). Calculer la dérivée de la fonction  $f(x) = \ln(\sin(x))$  sur  $]0, \pi/2[$ .
- 2). Résoudre sur  $]0, \pi/2[$  l'équation différentielle :

$$y' \sin(x) - y \cos(x) = 0 .$$

- 3). Donner sur  $]0, \pi/2[$  la solution générale de :

$$y' \sin(x) - y \cos(x) = \cos(x) .$$

- 4). Déterminer sur  $]0, \pi/2[$  la solution de l'équation différentielle  $y' \sin(x) - y \cos(x) = \cos(x)$  qui vérifie  $y(\pi/6) = 0$ .



U.F.R. des Sciences et des Techniques

Nom de l'U.E. :

Mathématiques et Physique Appliquée

S.E.V.E. Bureau des Examens

Code de l'U.E. :

X1X0012

Date de l'examen :

17 décembre 2013

Durée :

1 H

Documents autorisés :

Aucun

Calculatrice autorisée

oui  non

Type : Non-alphanumérique

Nom Prénom :

Groupe :

## Vision oculaire et instruments d'optique

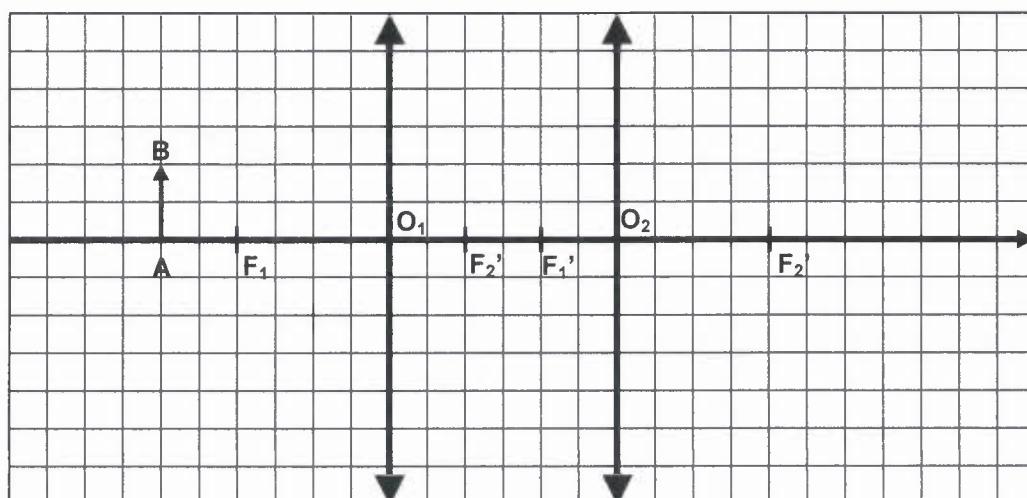
Chaque exercice peut être traité indépendamment des autres. Dans tous les exercices, on considérera que les conditions de Gauss sont satisfaites et que l'œil humain peut être assimilé à une lentille mince convergente  $L$  de distance focale variable avec une distance lentille-rétine fixe définie par la taille de l'œil qu'on prendra égale à 20 mm.

### EXERCICE 1

On considère deux lentilles minces  $L_1$  et  $L_2$  de centre respectif  $O_1$  et  $O_2$ .

- Déterminer par construction, la position et le grandissement de  $\overline{A_1B_1}$  image de  $\overline{AB}$  par  $L_1$  et  $\overline{A_2B_2}$ , image de  $\overline{AB}$  par le système optique constitué par  $L_1$  et  $L_2$ . L'échelle du graphique ci-dessous est telle que a représente deux carreaux ( $a \equiv 2$  carreaux).

On a  $\overline{AB} = a$ ;  $f_1 = +2a$ ;  $f_2 = +2a$ ;  $\overline{O_1A} = -3a$ ;  $\overline{O_1O_2} = +3a$ .



Indiquer la nature de l'image :

$\overline{A_1B_1}$  :

$\overline{A_2B_2}$  :

Préciser la taille de l'image :

$\overline{A_1B_1}$  :

$\overline{A_2B_2}$  :

Déterminer le grandissement linéaire :

$\gamma_1 =$

$\gamma_2 =$

$\gamma =$

- Vérifier par les calculs :

a) la position de l'image  $\overline{A_1B_1}$

b) le grandissement  $\gamma_1$

**EXERCICE 2 : Les défauts de l'œil**

Une personne jeune porte des verres correcteurs accolés à l'œil dont la vergence vaut  $-1\delta$ .

1. Quel est le défaut de cet œil ? Justifier la réponse.
2. Montrer que la vergence de cet œil au repos vaut  $51 \delta$ , sachant que la distance œil-rétine vaut 20 mm.
3. Cette personne a maintenant 60 ans, son amplitude d'accommodation a diminué et vaut  $1 \delta$ .
  - a) De quel trouble de la vision est à présent atteint cet œil ?
  - b) Calculer la position du punctum proximum de l'œil sans correction ?

- c) Calculer la vergence des verres correcteurs accolés à l'œil pour la vision de près, sachant que le punctum proximum de l'œil corrigé (doublet œil plus verres correcteurs) est à 25 cm.

### EXERCICE 3 : L'œil et la loupe

Un observateur avec une vision oculaire « standard » (œil emmétrope) observe un timbre assimilé à un objet  $\overline{AB}$  de hauteur 1 cm.

*La partie 1 est indépendante des parties 2 et 3.*

#### 1. Observation à l'œil nu.

- En quel point particulier l'observateur doit-il placer son œil pour voir le timbre sous l'angle  $\alpha$  le plus grand possible ?
- L'observateur positionne son œil à 25 cm du timbre.  
Représenter schématiquement le dispositif (timbre + œil) en indiquant l'angle  $\alpha$ .

Le pouvoir séparateur angulaire de l'œil humain est de  $1'=3.10^{-4}$  radians. Calculer la taille minimale du plus petit détail visible à l'œil nu.

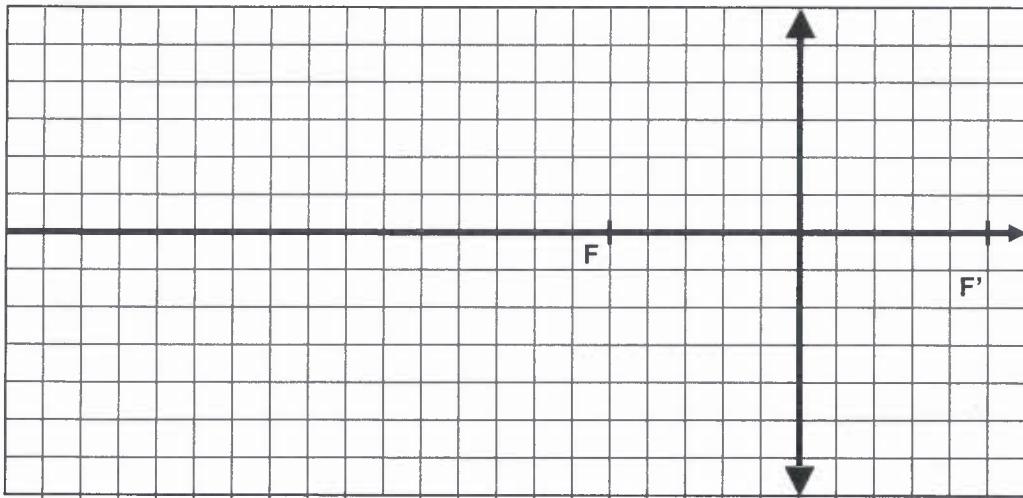
#### 2. Image du timbre au travers de la loupe.

Une loupe est constituée d'une lentille convergente L de centre O et de distance focale image  $f= 5$  cm. Le timbre est maintenant placé à 1 cm du foyer objet entre le foyer et la lentille.

- Déterminer par calcul la position de l'image  $\overline{A'B'}$  du timbre  $\overline{AB}$  au travers de la loupe.

b) Calculer la taille de l'image  $\overline{A'B'}$  :

c) Réaliser la construction graphique en considérant qu'un carreau représente 1 cm.



Indiquer la nature de l'image :

3. Observation au travers de la loupe.

a) Représenter sur le schéma précédent la position de l'œil par la lettre E de telle sorte que l'image du timbre soit vue sous l'angle apparent  $\alpha'$  le plus grand possible. Y indiquer également l'angle  $\alpha$  sous lequel l'œil voit  $\overline{A'B'}$ .

b) Calculer  $\alpha'$ .

c) Déterminer le grossissement G de la loupe.

**U.F.R. des Sciences et des Techniques**

**S.E.V.E. Bureau des Examens**

**Nom de l'U.E. :**

**Mathématiques et Physique Appliquée**

**Code de l'U.E. :**

**X1X0012**

**Date de l'examen :**

**17 décembre 2013**

**Durée :**

**1 H**

**Documents autorisés :**

**Tous**

**Calculatrice autorisée**

oui  non

**Type : Tous**

**Groupe :**

**Nom Prénom :**

Répondez directement sur les feuilles d'énoncé, n'oubliez d'écrire vos nom, prénom et n° de groupe sur chaque feuille.  
Les parties A et B sont indépendantes.

### A- Etude d'un œil artificiel

On désire réaliser une expérience montrant à des étudiants le fonctionnement de l'œil.

Pour cette expérience, on dispose du matériel suivant :

- un banc d'optique gradué identique à celui utilisé en TP
- un écran du type de celui que vous avez utilisé en TP
- une lentille  $L_1$  de distance focale de  $f'_1=20$  cm
- une lentille  $L_2$  de distance focale  $f'_2=10$  cm
- une loupe de distance focale image  $f'=15$  cm
- une tige de laiton permettant de fixer la distance entre deux cavaliers supports
- une source lumineuse positionnée à la graduation 20 cm représentant l'objet, sachant que la lumière se propage vers les graduations croissantes du banc d'optique.

1- On veut dans un premier temps réaliser un œil artificiel au repos à partir de  $L_1$  et de l'écran.

a- À quelles parties de l'œil physiologique correspondent la lentille et l'écran ?

b- À quelle graduation doit-on positionner l'écran si  $L_1$  est à la graduation 60 cm ?

c- Dans ces conditions expérimentales, pourquoi n'est-il pas possible d'observer une image nette sur l'écran ?

d- Est-il possible d'observer une image nette sur l'écran en plaçant la loupe sur le banc ?

Si oui à quelle graduation doit-elle être placée ? Pourquoi ?

NOM :  
PRENOM :

Faire un schéma représentant cette situation.

2- On veut maintenant illustrer la vision au punctum proximum. La distance entre la lentille et l'écran de l'œil artificiel étant fixée à l'aide de la barre de laiton, on remplace la lentille  $L_1$  par la lentille  $L_2$  et on enlève la loupe.

a- À quelle graduation doit être positionnée la lentille  $L_1$  de l'œil artificiel pour avoir une image nette sur l'écran ?

b- Faire un schéma illustrant cette situation.

## B- Détermination de la vergence d'une lentille sphérique mince

NOM :  
PRENOM :

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

### 1- Méthode directe

Les lentilles A et B sont considérées sphériques minces, leur centre optique sera considéré en leur milieu.

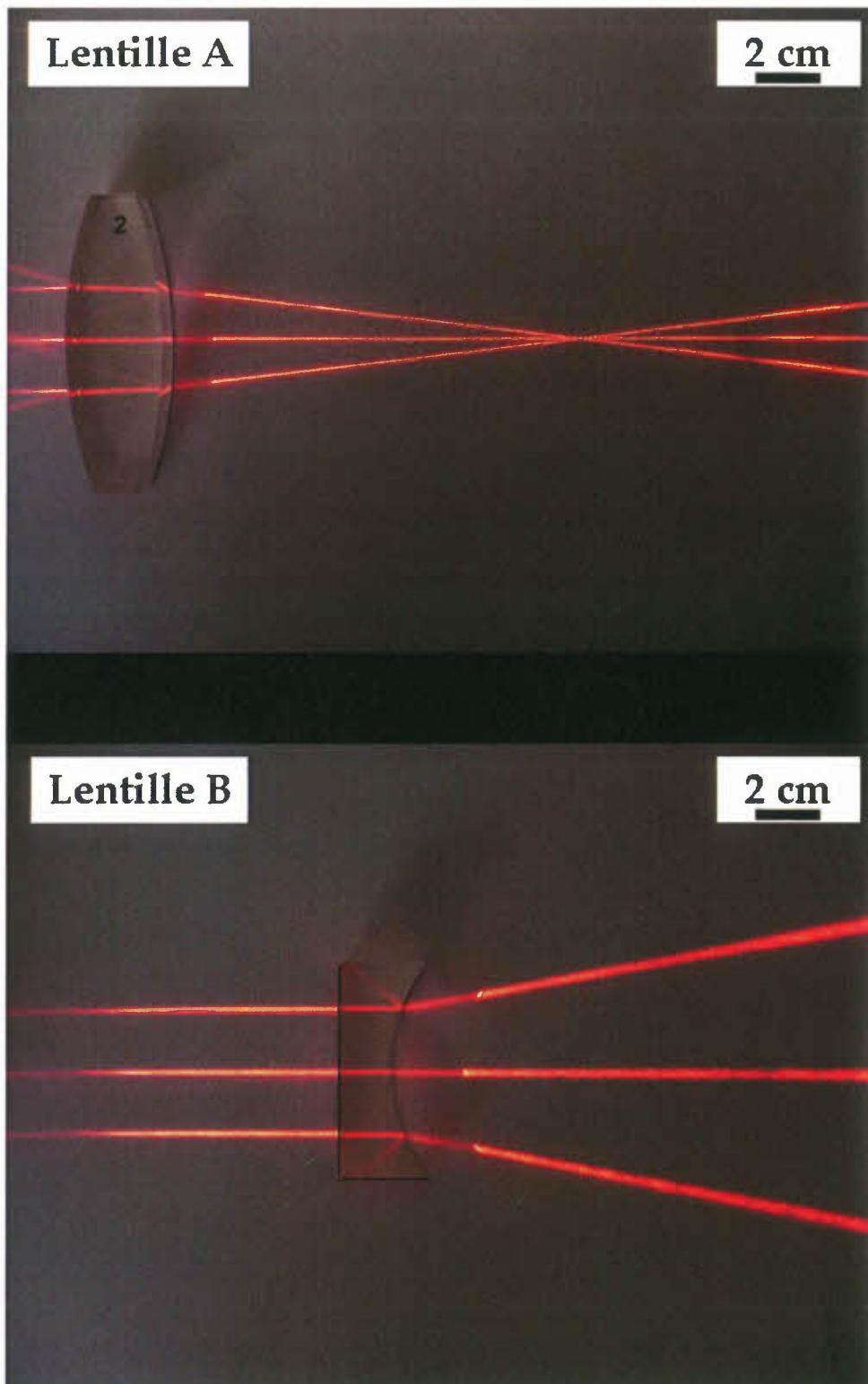
Déterminer la distance focale image des lentilles A et B et en déduire leur vergence (la barre noire sur les images correspond à 2 cm). Vous laisserez vos traits de constructions sur les images.

$$f'_A =$$

$$V_A =$$

$$f'_B =$$

$$V_B =$$



## 2- Méthode graphique

NOM :  
PRENOM :

- a- Cette méthode consiste dans un premier temps à déterminer les positions relatives de plusieurs objets et images conjugués. En reportant l'ensemble de ces points dans un repère orthonormé représentant  $\frac{1}{\overline{OA'}}$  en fonction de  $\frac{1}{\overline{OA}}$ , on obtient une droite.

Expliquez pourquoi on obtient une droite et donnez sa pente (autrement dit son coefficient directeur) ?

- b- A quoi correspondent les points d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées ?

- c- Indiquer sur la figure page 5 les natures des objets et images dans chaque quadrant.

Indiquer aussi sur la figure page 5 où se trouve le quadrant correspondant au fonctionnement en loupe ?

- d- Représenter sur la figure page 5 la droite obtenue dans le cas d'une lentille convergente de distance focale image de 25 cm.

Par quel quadrant cette droite ne passe-t-elle pas ? Pourquoi ?

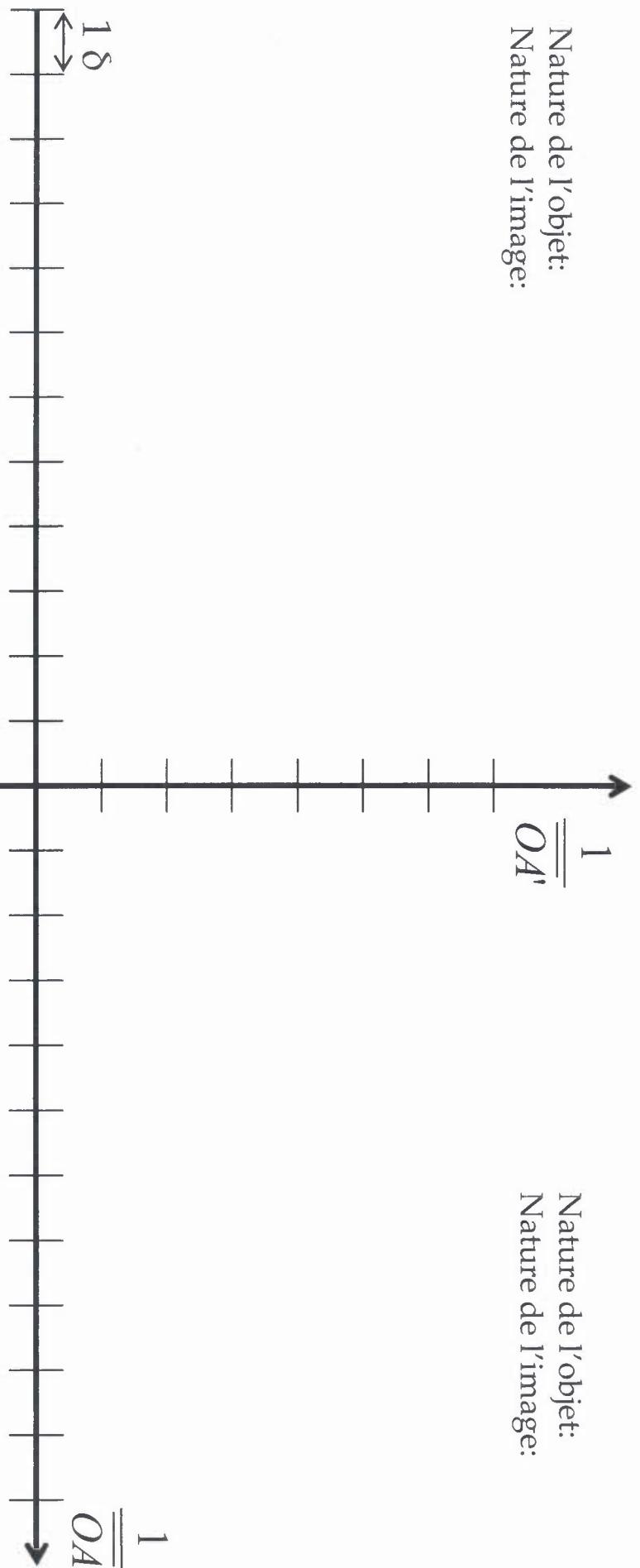
## 3- Méthode par autocollimation

- a- Pour quel type de lentille peut-on mettre en œuvre cette méthode ?

- b- Où doit-on placer précisément l'objet par rapport à la lentille ?

Nature de l'objet:  
Nature de l'image:

Nature de l'objet:  
Nature de l'image:



NOM :

PRENOM :

Nature de l'objet:  
Nature de l'image:

Nature de l'objet:  
Nature de l'image:



Semestre 2



Examen — Première session — mai 2014  
durée : 1h30  
*Appareils électroniques et documents interdits.*

*On apportera le plus grand soin à la rédaction. Les réponses doivent être justifiées, et les résultats du cours utilisés être précisés. Les calculs doivent figurer sur la copie. Les exercices sont indépendants, et ont leurs propres notations.*

**Question de cours.**

- (1) Citer l'énoncé du cours (Proposition 3.6 des notes en ligne) comparant le nombre de vecteurs dans les familles libres et dans les familles génératrices.
- (2) Utiliser l'énoncé précédent pour démontrer que deux bases d'un même espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.
- (3) La notion de *dimension* d'un espace vectoriel est un acquis important du cours d'algèbre linéaire. Quelle est la *définition* de la dimension d'un espace vectoriel ?

**Exercice 1.** On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer le déterminant de  $A$ .
- (2) Donner des équations indépendantes et déterminer une base du noyau de l'endomorphisme  $\varphi$ .
- (3) Donner, s'il y en a, le ou les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image par  $\varphi$  est le vecteur  $(1, 2, 0)$ .

**Exercice 2.** On considère l'application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  par la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathcal{B}'$  la base consistant des trois vecteurs

$$e'_1 = (0, 1, 1), \quad e'_2 = (1, 0, 1), \quad e'_3 = (1, 1, 0).$$

- (1) Calculer la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , ainsi que son inverse.
- (2) Calculer la matrice  $A'$  de l'endomorphisme  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 3.** Soit  $u$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $D$  la droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  dirigée par le vecteur  $u$ . Soit  $P$  un supplémentaire de  $D$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) (a) Quelle est la dimension de  $P$  ?  
(b) Justifier que  $P$  admet une base  $\mathcal{B}_P = \{v_1, v_2\}$  constituée de deux vecteurs.
- (2) Justifier que  $\mathcal{B} = \{u, v_1, v_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  (on pourra faire appel à un énoncé du cours).
- (3) Soit  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection sur  $D$  parallèlement à  $P$ .
  - (a) Quel est le noyau de  $p$  ?
  - (b) Donner la matrice de  $p$  dans cette base  $\mathcal{B} = \{u, v_1, v_2\}$ .
- (4) Soit  $s = \text{id}_E - 2p$  la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $P$ .
  - (a) Quel est le noyau de  $s$  ?
  - (b) Donner la matrice de  $s$  dans la base  $\mathcal{B}$ .



# Session 2

# Rattrapages



	Nom de l'U.E. :	Mathématiques et Physique Appliquée
U.F.R. des Sciences et des Techniques	Code de l'U.E. :	X1X0012
S.E.V.E. Bureau des Examens	Date de l'examen :	Juin 2014
	Durée :	1 H
	Documents autorisés :	Aucun
	Calculatrice autorisée	<input checked="" type="checkbox"/> oui <input type="checkbox"/> non
		Type : Non-alphanumérique

Numéro d'anonymat :

## Vision oculaire et instruments d'optique

Chaque exercice peut être traité indépendamment des autres. Dans tous les exercices, on considérera que les conditions de Gauss sont satisfaites et que l'œil humain peut être assimilé à une lentille mince convergente  $L$  de distance focale variable.

### EXERCICE 1 : Lentille

Une lentille convergente de 12 cm de distance focale donne d'un objet une image réelle 8 fois plus petite que l'objet. Calculer la distance de l'objet à la lentille.

### EXERCICE 2 : Œil

Le foyer d'un œil normal n'accordant pas est situé sur la rétine ; la distance focale est alors de 15 mm. Que devient cette distance focale lorsque le cristallin accommode de manière à voir nettement un objet situé à :

1. 1,5 m de distance ?
2. la distance de 20 cm ?

### EXERCICE 3 : Instrument d'optique

Un microscope est constitué d'un objectif de distance focale  $\overline{O_1F_1}$  de 8 mm et d'un oculaire de distance focale  $\overline{O_2F_2}$  de 20 mm. L'objectif et l'oculaire seront considérés comme des lentilles minces. La distance  $\overline{F_1F_2}$  vaut 16 cm. Un objet  $\overline{AB}$  est observé à travers le microscope et son image  $\overline{A_2B_2}$  à travers le microscope est nette pour un observateur à vue normale regardant à l'infini sans accomoder. La taille de l'image intermédiaire  $\overline{A_1B_1}$  (à travers l'objectif) est, en valeur absolue, de 2,5 cm.

1. Compléter le schéma de l'**annexe** en positionnant l'oculaire et les foyers des deux lentilles. Déterminer, par construction géométrique, la position de l'objet  $\overline{AB}$ . Faire le schéma à l'échelle 1 avec soin.
2. Quelle est la distance de l'objet à l'objectif ?
3. Quel est le grossissement de l'objectif ?
4. Calculer la puissance intrinsèque du microscope.
5. Calculer le grossissement commercial du microscope.
6. On veut faire une photographie de l'objet  $\overline{AB}$ . Dans ce but, on a placé une plaque sensible solidaire de l'oculaire située à 10 cm de ce dernier. Le réglage est fait en déplaçant l'ensemble oculaire-plaque par rapport à l'objectif. Les positions de l'objet et de l'objectif sont identiques à celles des questions précédentes. De combien et dans quel sens faut-il déplacer l'oculaire pour que l'image finale réelle et agrandie  $\overline{A_2B_2}$  se forme dans le plan de la plaque sensible ? Quel est, pour cette position, le grossissement du microscope ?

Annexe

